# SOLUCIONES EXAMEN FINAL (16/6/2014)

## 1^er^EXAMEN PARCIAL

**1.** *Calcule los siguientes límites, si existen:*

$$a)\ \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-3n}\right)$$

$$b)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2}{2n^2+3}\right)^{n^2+n}$$

**Solución.**

*a)* El límite presenta una indeterminación del tipo $\infty-\infty$ que se puede resolver como sigue:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-3n}\right) &= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-3n}\right)\left(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-3n}\right)}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-3n}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+1)-(n^2-3n)}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-3n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-3n}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3n}{n}+\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{n^2}{n^2}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{\frac{n^2}{n^2}-\frac{3n}{n^2}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{3}{n}}}\\
&= \frac{3}{1+1} = \boxed{\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

*b)* Este límite presenta una indeterminación del tipo $1^\infty$ que se puede resolver, entre otras, de la siguiente forma:

Dado que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2}{2n^2+3}\right)^{n^2+n} = \lim_{n\to\infty} e^{\ln\left(\left(\frac{2n^2}{2n^2+3}\right)^{n^2+n}\right)} = \lim_{n\to\infty} e^{(n^2+n)\ln\left(\frac{2n^2}{2n^2+3}\right)}$$

y teniendo en cuenta que

$$\lim_{n\to\infty}(n^2+n)\ln\left(\frac{2n^2}{2n^2+3}\right) = \lim_{n\to\infty}(n^2+n)\left(\frac{2n^2}{2n^2+3}-1\right) = \lim_{n\to\infty}(n^2+n)\frac{-3}{2n^2+3} = -\frac{3}{2},$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2}{2n^2+3}\right)^{n^2+n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}(n^2+n)\ln\left(\frac{2n^2}{2n^2+3}\right)} = \boxed{e^{-3/2}}$$

**2.** *Estudie si la sucesión* $\begin{cases} a_1 = \sqrt{6} \\ a_{n+1} = \sqrt{6+a_n}, \ n \geq 1 \end{cases}$ *es convergente y, en caso afirmativo, calcule su límite.*

**Solución**

Supongamos provisionalmente que existe el límite de $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, al que denotamos $a$, entonces obviamente $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ y $a$ debería ser una solución de $a = \sqrt{6+a}$. Elevando al cuadrado ambos miembros de la igualdad se tiene

$$a^2 - a - 6 = 0 \ \Rightarrow \ a = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 3, \\ -2. \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que $-2$ no es solución de la ecuación $a = \sqrt{6+a}$, ya se puede concluir que, de existir el límite de la sucesión dada, éste ha de ser 3. Ahora hay que demostrar la existencia del límite, lo que se puede concluir probando que la sucesión es monótona y acotada.

*Monotonía de* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

En principio, como $a_1 = \sqrt{6}$ y $a_2 = \sqrt{6+\sqrt{6}} \geq \sqrt{6} = a_1$, se puede conjeturar que es monótona creciente e intentar demostrarlo por inducción.

1. Para $n = 1$ se acaba de probar que $a_1 \leq a_2$.
2. Supongamos que es cierto para $n$, es decir, $a_n \leq a_{n+1}$, y veamos que de esto se puede deducir que $a_{n+1} \leq a_{n+2}$:

$$a_n \leq a_{n+1} \ \Rightarrow \ 6 + a_n \leq 6 + a_{n+1} \ \Rightarrow \ a_{n+1} = \sqrt{6+a_n} \leq \sqrt{6+a_{n+1}} = a_{n+2}$$

Por tanto, el principio de inducción asegura que $a_n \leq a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, esto es, la sucesión es monótona creciente.

*Acotación de* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

Dado que la sucesión es monótona creciente hay que encontrar una cota superior de $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, y el posible límite ha de ser una de ellas, de hecho sería el supremo. Luego hay que probar po inducción que 3 es cota superior

1. Para $n = 1$ es claro que se satisface $a_1 = \sqrt{6} \leq 3$.
2. Supongamos que es cierto para $n$, es decir, $a_n \leq 3$, y veamos que de ello se puede deducir que $a_{n+1} \leq 3$:

$$a_n \leq 3 \ \Rightarrow \ 6 + a_n \leq 6 + 3 = 9 \ \Rightarrow \ a_{n+1}\sqrt{6+a_n} \leq \sqrt{9} = 3.$$

Por tanto, es cierto que $a_n \leq 3$ para todo $n \in \mathbb{N}$, esto es, 3 es una cota superior de la sucesión.

Finalmente, del teorema de monotonía y acotación se sigue que existe el límite de la sucesión dada y ahora ya se puede concluir que

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = 3}$$

**3.** *Estudie la convergencia absoluta y la convergencia de las series:*

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!\, e^{2n}} \qquad\qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+1}}$$

**Solución**

*a*) Apliquemos el criterio del cociente, también llamado de D'Alembert:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!e^{2(n+1)}}}{\dfrac{n^n}{n!\, e^{2n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{(n+1)^n\ (n+1)}{(n+1)\ n!\ e^{2n}\ e^2}}{\dfrac{n^n}{n!\, e^{2n}}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{1}{e^2} = \frac{e}{e^2} = \frac{1}{e} < 1.
\end{aligned}$$

Luego es convergente. Además, es una serie de términos positivos,

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!\, e^{2n}} \text{ es absolutamente convergente.}}$$

*b*) Al tratarse de una serie alternada aplicaremos el criterio de Leibnitz. Observamos que

$$n+1 < n+2 \ \Rightarrow\ \sqrt[3]{n+1} < \sqrt[3]{n+2} \ \Rightarrow\ |a_n| = \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}} > \frac{1}{\sqrt[3]{n+2}} = |a_{n+1}|,$$

luego se cumple $|a_n| > |a_{n+1}|$ para todo $n \in \mathbb{N}$, que es una de las dos condiciones para poder aplicar el criterio. En cuanto a la otro condición, resulta inmediato que

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{|(-1)^n|}{\sqrt[3]{n+1}} = 0.$$

Por tanto, la serie es convergente según el criterio de Leibnitz. Veamos si converge absolutamente. Tendremos que estudiar la serie de los valores absolutos, es decir,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+1}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}.$$

Probaremos que es divergente por comparación con la armónica (a partir de 1/2). Es claro que

$$n+1 > \sqrt[3]{n+1} \ \Rightarrow\ \frac{1}{n+1} < \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}} \ \Rightarrow\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}$$

Como la armónica es divergente ella es divergente. Podría haberse llegado también a este resultado por el criterio de comparación en el límite, comparando con el término general de la armónica generalizada o por el criterio de Prinsgheim con $\alpha = 1/3$.

Luego la serie no es absolutamente convergente pero si convergente, esto es,

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+1}} \text{ es condicionalmente convergente.}}$$

**4.** *Halle el radio y el campo de convergencia de la serie de potencias*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2+n-2}\left(\frac{x-1}{4}\right)^n .$$

*Si es posible, calcule la suma de la serie cuando $x = 5$.*

**Solución**

Dado que
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2+n-2}\left(\frac{x-1}{4}\right)^n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n^2+n-2)\,4^n}(x-1)^n,$$
el centro de la serie es $x_0 = 1$ y el coeficiente n-ésimo es $a_n = \dfrac{1}{(n^2+n-2)\,4^n}$. Puesto que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(n^2+n-2)\,4^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt[n]{n^2+n-2}} = \frac{1}{4}$$

pues

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+n-2} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2(1+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2})} = \lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n})^2 \sqrt[n]{1+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}} = 1,$$

el teorema de Cauchy-Hadamard asegura que el radio de convergencia es

$$\boxed{r = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = 4}$$

En principio, el intervalo abierto $(x_0 - r, x_0 + r) = (1-4, 1+4) = (-3, 5)$ está incluido en el campo de convergencia y éste, a su vez, esta contenido en el intervalo cerrado $[-3, 5]$. Veamos que ocurre el los puntos de la frontera, es decir, en $x = -3$ y $x = 5$. Sustituyendo $x = -3$ resulta la serie
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-n+2}\left(\frac{-3-1}{4}\right)^n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2-n+2}$$
La convergencia de esta serie puede determinarse de varias formas, la más breve es utilizar el teorema de la convergencia absoluta. Consideremos

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n^2-n+2}\right| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-n+2}.$$

Esta serie es convergente por el criterio de comparación en el límite con la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ que sabemos es convergente, o bien utilizando Prinsgheim con $\alpha = 2$. Al ser convergente la serie alternada, por el criterio de la convergencia absoluta es convergente y, en consecuencia, para $x = -3$ la serie de potencias es convergente.

Si sustituimos el valor $x = 5$ en la serie dada, resulta p

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-n+2}\left(\frac{5-1}{4}\right)^n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-n+2},$$

que justamente es la serie absoluta estudiada más arriba y, por tanto, es convergente. Luego la serie de potencias converge para $x = 5$ y el dominio de convergencia es

$$\boxed{C = [-3, 5]}$$

Hemos visto que la serie es convergente cuando $x = 5$. Para calcular su suma, descomponemos en fracciones simples. Resolvamos para ello el polinomio $n^2 - n + 2$ del denominador

$$n^2 + n - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad n = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 1, \\ -2. \end{cases}$$

Luego $n^2 + n - 1 = (n-1)(n+2)$ y la descomposición será

$$\frac{1}{n^2+n-2} = \frac{A}{n-1} + \frac{B}{n+2},$$

de donde

$$A(n+2) + B(n-1) \equiv 1.$$

Para $n = 1$, resulta $3A = 1$, luego $A = 1/3$. Para $n = -2$, $-3B = 1$, luego $B = -1/3$. Por tanto

$$\frac{1}{n^2+n-2} = \frac{1/3}{n-1} + \frac{-1/3}{n+2}.$$

La suma parcial $n$-esima $S_n$ resulta

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=2}^{n} \left( \frac{1/3}{k-1} + \frac{-1/3}{k+2} \right) = \frac{1}{3} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{3} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k+2} \\ &= \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \boxed{\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n-1}} \right) \\ &- \frac{1}{3} \left( \boxed{\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n-1}} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{-1/3}{n} + \frac{-1/3}{n+1} + \frac{-1/3}{n+2}. \end{aligned}$$

Luego

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-n+2} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{-1/3}{n} + \frac{-1/3}{n+1} + \frac{-1/3}{n+2} \right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} = \boxed{\frac{11}{18}}$$

**5.** *Represente gráficamente el dominio de la función*

$$f(x, y) = \frac{\ln(x^2 + y^2 - 6y)}{\sqrt{y-3}},$$

*y la frontera del mismo. ¿Es* Dom$(f)$ *un conjunto abierto?¿Y cerrado?¿Y compacto?*

**Solución**

Se tienen que cumplir, por un lado, que el argumento de logaritmo no sea ni cero ni negativo, es decir,

$$x^2 + y^2 - 6y > 0,$$

por otro lado, se tiene que cumplir que

$$y - 3 > 0,$$

para que esté definida la raíz cuadrada y no se anule.

Observamos que $x^2+y^2-6y > 0$ es una de las regiones que determina la curva $x^2+y^2-6x = 0$. Para saber de qué curva se trata, completamos cuadrados. Puesto que

$$x^2 + y^2 - 6y = x^2 + \underbrace{y^2 - 6y + 9}_{(y-3)^2} - 9,$$

se tiene que la curva

$$x^2 + (y-3)^2 = 9,$$

esto es, la circunferencia de centro $(0, 3)$ y radio 3. Dado que

$$x^2 + y^2 - 6y > 0 \Longleftrightarrow x^2 + (y-3)^2 - 9 > 0 \Longleftrightarrow x^2 + (y-3)^2 > 9,$$

la región que determina $x^2 + y^2 - 6y > 0$ es el exterior de la circunferencia.

Por otra parte, como $y > 3$, resultará que el dominio de $f$ es el conjunto que resulta de tomar del exterior de la circunferencia solo aquella parte del plano que está por encima de la recta $y = 3$, que no pertenecerá al dominio. El resto del plano no pertenece al dominio.

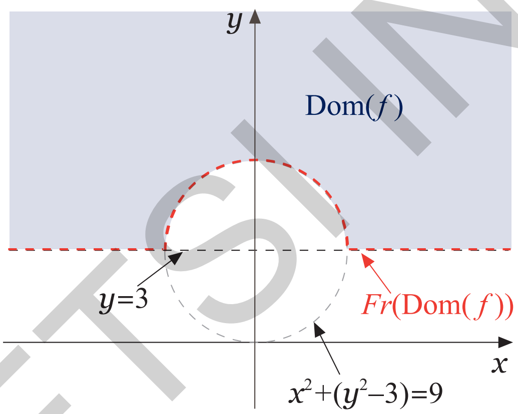


Figura 1: Dominio de la función (región sombreada sin línea de puntos) y frontera del dominio (línea de puntos roja)

El Dom$(f)$ es abierto pues sus puntos son interiores, escojamos el punto del dominio que escojamos siempre encontraremos una bola abierta que lo contenga y tal que toda ella esté dentro del dominio. No es cerrado, pues los puntos sobre la recta y la semicircunferencia superior no pertenecen al dominio y son puntos frontera del dominio de $f$. No es compacto al no ser acotado y tampoco cerrado.

La frontera está constituida por la unión de las semirrectas

$$\{(x, 3) \mid x \leq -3\} \qquad \text{y} \qquad \{(x, 3) \mid 3 \leq x\},$$

junto con la semicircunferencia superior. La ecuación de la circunferencia es $x^2 + (y-3)^2 = 9$, luego $y = 3 \pm \sqrt{9 - x^2}$ y la ecuación de la semicircunferencia superior es $y = 3 + \sqrt{9 - x^2}$. Por tanto,

$$Fr(\mathrm{Dom}(f)) = \{(x, 3) \mid x \leq -3\} \cup \{(x, 3) \mid 3 \leq x\} \cup \{(x, 3 + \sqrt{9 - x^2}) \mid -3 \leq x \leq 3\}$$

## 2ºEXAMEN PARCIAL

**1.** *Calcule los siguientes límites, si existen:*

*a)* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x+y)}{x-y}$.

*b)* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{-1/(x^2+y^2)} \cdot \cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$.

**Solución**

*a)* Calculando los límites iterados se obtiene:

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}(x+y)}{x-y}\right)\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} \overset{R.L'Hôpital}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1} = \cos 0 = 1.$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}(x+y)}{x-y}\right)\right) = \lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen} y}{-y} \overset{R.L'Hôpital}{=} \lim_{y\to 0}\frac{\cos y}{-1} = -\cos 0 = -1.$$

Como ambos límites iterados existen pero no coinciden, se puede concluir que no existe el límite doble $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x+y)}{x-y}$.

*Otra forma: Por subconjuntos*

Dado que

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} \frac{\operatorname{sen}(x+y)}{x-y} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \neq \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} \frac{\operatorname{sen}(x+y)}{x-y} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{-x} = -1$$

se concluye que no existe el límite doble.

*b)* Aunque no es necesario, el límite de la función $f(x,y) = e^{-1/(x^2+y^2)} \cdot \cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$ en $(0,0)$ se puede estudiar considerando las coordenadas polares de origen $(0,0)$. De este modo se tiene

$$f(\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta) = e^{-1/(\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\operatorname{sen}^2\theta)} \cdot \cos\left(\frac{1}{\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\operatorname{sen}^2\theta}\right) = e^{-1/\rho^2}\cdot\cos\frac{1}{\rho^2}$$

Ahora, dado que

$$\lim_{\rho\to 0} e^{-1/\rho^2} = 0$$
$$\left|\cos\frac{1}{\rho^2}\right| \leq 1 \quad \forall\rho > 0$$

se verifica

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{-1/(x^2+y^2)} \cdot \cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) = \lim_{\rho\to 0} e^{-1/\rho^2}\cdot\cos\frac{1}{\rho^2} = 0.$$

**2.** *Dada la función*

$$f(x,y) = \sqrt{3x^2 + (y-1)^2},$$

*estudie si su gráfica tiene plano tangente en los puntos* $(0,1,f(0,1))$ *y* $(1,2,f(1,2))$. *En caso afirmativo, determine la ecuación de dicho plano.*

**Solución**

Se trata de estudiar la diferenciabilidad de la función $f$ en los puntos $(0,1)$ y $(1,2)$. Se observa que $f(x,y) = \phi(g(x,y))$ donde:

- $g(x,y) = 3x^2 + (y-1)^2$ es diferenciable $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, pues es una función polinómica.
- $\phi(t) = \sqrt{t}$ es una función real de variable real definida en $[0,+\infty)$ y derivable $\forall t \in (0,+\infty)$.

Por tanto, $f$ es diferenciable $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $t = g(x,y) = 3x^2 + (y-1)^2 > 0$. Dado que $g$ es una función no negativa y $3x^2 + (y-1)^2 = 0$ si y sólo si $x = 0$ e $y = 1$, entonces $f$ es diferenciable $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,1)\}$, o equivalentemente, la gráfica de $f$, $G(f)$, admite plano tangente en $(x,y,f(x,y))$ siempre que $(x,y) \neq (0,1)$. En particular, existe plano tangente a $G(f)$ en $(1,2,f(1,2))$. En cuanto al punto $(0,1,f(0,1))$, no se puede aplicar el argumento anterior y es necesario recurrir a las definiciones. Veamos, en primer lugar, si existen las derivadas parciales de $f$ en $(0,1)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,1) - f(0,1)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{3x^2}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{3}\,|x|}{x},$$

pero

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{3}\,|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{3}\,x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{3} = \sqrt{3} \neq \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{3}\,|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{3}\,(-x)}{x} = \lim_{x\to 0^-} (-\sqrt{3}) = -\sqrt{3}.$$

Por tanto, no existe $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,1)$, y la función no es diferenciable en $(0,1)$, o equivalentemente, $G(f)$ no admite plano tangente en el punto $(0,1,f(0,1))$.

*Plano tangente a* $G(f)$ *en* $(1,2,f(1,2)) = (1,2,2)$:

Sabemos que su ecuación es de la forma

$$z = f(1,2) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,2)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)(y-2),$$

y para calcular las derivadas parciales podemos utilizar las reglas de derivación. Se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{3x}{\sqrt{3x^2 + (y-1)^2}} \implies \frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = \frac{3}{2},\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{y-1}{\sqrt{3x^2 + (y-1)^2}} \implies \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Luego

$$z = 2 + \frac{3}{2}(x-1) + \frac{1}{2}(y-2),$$

y operando resulta

$$\boxed{3x + y - 2z + 1 = 0}$$

**3.** *Dada la función $f(x, y) = 6x - 2x^3 - xy^2$, determine:*

*a) Los extremos relativos de $f$ en $\mathbb{R}^2$.*
*b) Los extremos absolutos de $f$ sobre el conjunto $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 3\}$.*

**Solución**

*a*) La función dada es una función polinómica por lo que es diferenciable en $\mathbb{R}^2$ y, en consecuencia, todo punto donde $f$ alcance un extremo relativo ha de ser un punto crítico de $f$; es decir, ha de ser solución del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 6 - 6x^2 - y^2 = 0 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2xy = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 6 - 6x^2 - y^2 = 0 \\ \\ x = 0 \quad \text{ó} \quad y = 0 \end{cases}$$

Si $x = 0$, de la primera ecuación se obtiene $y = \pm\sqrt{6}$. Si $y = 0$, de la primera ecuación se obtiene $x = \pm 1$. Por tanto, los puntos críticos de $f$ son:

$$(1, 0), \ (-1, 0), \ (0, \sqrt{6}), \ (0, -\sqrt{6})$$

Para averiguar si $f$ alcanza algún extremo relativo en alguno de estos puntos utilizaremos el criterio de la matriz hessiana. Dado que

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} -12x & -2y \\ -2y & -2x \end{pmatrix}$$

se tiene:

• $\det(Hf(1, 0)) = \begin{vmatrix} -12 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} > 0$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 0) = -12 < 0$, entonces $f$ alcanza un máximo relativo en $(1, 0)$ con valor $f(1, 0) = 4$.

• $\det(Hf(-1, 0)) = \begin{vmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} > 0$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 0) = 12 > 0$, entonces $f$ alcanza un mínimo relativo en $(-1, 0)$ con valor $f(-1, 0) = -4$.

• $\det(Hf(0, \sqrt{6})) = \begin{vmatrix} 0 & -2\sqrt{6} \\ -2\sqrt{6} & 0 \end{vmatrix} < 0$, entonces $(0, \sqrt{6})$ es un punto de silla de $f$.

• $\det(Hf(0, -\sqrt{6})) = \begin{vmatrix} 0 & 2\sqrt{6} \\ 2\sqrt{6} & 0 \end{vmatrix} < 0$, entonces $(0, -\sqrt{6})$ es un punto de silla de $f$.

En conclusión, $f$ sólo tiene un máximo relativo, con valor 4, que alcanza en el punto $(1, 0)$ y un mínimo relativo, con valor $-4$, que alcanza en el punto $(-1, 0)$.

*b*) El teorema de Weierstrass asegura que $f$ alcanza su máximo y su mínimo absolutos sobre $D$ pues $f$ es una función continua y $D$ es un conjunto compacto.

*Selección de puntos sobre los que $f$ pudiera alcanzar extremo absoluto*

• Puntos de no diferenciabilidad de $f$ en $D$: No existen pues $f$ es diferenciable en $\mathbb{R}^2$.

• En $\overset{\circ}{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 3\}$ se seleccionan los puntos críticos de $f$ encontrados en el apartado anterior que pertenecen a $\overset{\circ}{D}$, esto es,

$$\boxed{(1, 0) \text{ y } (-1, 0)}$$

• En $Fr(D) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = x^2 + y^2 - 3 = 0\}$ se seleccionan:

◦ Puntos no regulares de $Fr(D)$, esto es, los puntos $(x, y) \in Fr(D)$ tales que $\nabla g(x, y) = (2x, 2y) = (0, 0)$. Pero, dado que $\nabla g(x, y) = (0, 0)$ si y sólo si $(x, y) = (0, 0)$ y $(0, 0) \notin Fr(D)$, no hay puntos que seleccionar.

◦ Puntos estacionarios de la función de Lagrange

$$F(x, y) = f(x, y) - \lambda g(x, y) = 6x - 2x^3 - xy^2 - \lambda(x^2 + y^2 - 3)$$

pertenecientes a $Fr(D)$; es decir, los puntos $(x, y)$ que satisfacen el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 6 - 6x^2 - y^2 - 2\lambda x = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y) = -2xy - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 3 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} 6 - 6x^2 - y^2 - 2\lambda x = 0 \\ y(x + \lambda) = 0 \\ x^2 + y^2 = 3 \end{array} \right.$$

Para resolver este sistema tratamos de eliminar el parámetro $\lambda$ por igualación. Ahora bien, para poder despejar $\lambda$ en la primera ecuación debe ser $x \neq 0$, y para poder despejarlo en la segunda debe ser $y \neq 0$. Estudiemos, en primer lugar, si existe alguna solución del sistema cuando no se da alguna de estas dos condiciones.

Si $x = 0$, de la primera ecuación ha de ser $y^2 = 6$ y de la tercera $y^2 = 3$, lo cual es absurdo, por tanto, no hay soluciones del sistema con $x = 0$.

Si $y = 0$ se verifica la segunda ecuación y, para que se verifique la tercera, ha de ser $x = \pm\sqrt{3}$. Además, sustituyendo estos valores, la primera se verifica con $\lambda = 6/\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$, si $x = \sqrt{3}$, y con $\lambda = -2\sqrt{3}$, si $x = -\sqrt{3}$. Por tanto, se seleccionan los puntos

$$\boxed{(\sqrt{3}, 0) \text{ y } (-\sqrt{3}, 0)}$$

Si $x \neq 0$ e $y \neq 0$, despejando $\lambda$ en las dos primeras ecuaciones, se tiene

$$\lambda = \frac{6 - 6x^2 - y^2}{2x} = -x,$$

de donde se obtiene

$$4x^2 + y^2 = 6.$$

Teniendo en cuenta que de la tercera ecuación es $y^2 = 3 - x^2$, resulta $4x^2 + 3 - x^2 = 6$, lo que equivale a $x^2 = 1$. Por lo que si $x \neq 0$ e $y \neq 0$, las soluciones del sistema son

$$x = 1, \quad y = \pm\sqrt{2}, \quad \lambda = -1$$

y

$$x = -1, \quad y = \pm\sqrt{2}, \quad \lambda = 1.$$

Por tanto, se seleccionan los puntos

$$\boxed{(1, \sqrt{2}), \quad (1, -\sqrt{2}), \quad (-1, \sqrt{2}) \ \text{ y } \ (-1, -\sqrt{2})}$$

*Evaluación de $f$ en los puntos seleccionados y conclusión*

Sustituyendo los puntos obtenidos en $f(x, y) = 6x - 2x^3 - xy^2$, resulta

$$\begin{aligned}
&f(1, 0) = 6 - 2 = 4\\
&f(-1, 0) = -6 + 2 = -4\\[6pt]
&f(\sqrt{3}, 0) = 6\sqrt{3} - 2(\sqrt{3})^3 = 6\sqrt{3} - 6\sqrt{3} = 0\\
&f(-\sqrt{3}, 0) = -6\sqrt{3} - 2(-\sqrt{3})^3 = -6\sqrt{3} + 6\sqrt{3} = 0\\[6pt]
&f(1, \pm\sqrt{2}) = 6 - 2 - 2 = 2\\
&f(-1, \pm\sqrt{2}) = -6 + 2 + 2 = -2
\end{aligned}$$

En conclusión, el máximo absoluto de $f$ sobre $D$ es 4, que alcanza en el punto $(1, 0)$, y el mínimo absoluto de $f$ sobre $D$ es $-4$, que alcanza en el punto $(-1, 0)$.

**4.** *Calcule la integral*

$$I = \iint_D x e^{x+y} \, dx dy,$$

*donde $D$ es la región acotada entre las gráficas de $y = x$ e $y = x^2 - x$.*

**Solución**

Las gráficas que encierran el recinto de integración corresponden a la recta $y = x$ y a la parábola $y = x^2 - x$, que también se puede escribir $y = (x - 1/2)^2 - 1/4$, luego su vértice es el punto $(1/2, -1/4)$. Para poder determinar el recinto, debemos hallar los puntos de corte de ambas gráficas, esto es, encontrar las soluciones del sistema formado por ambas ecuaciones:

$$\begin{cases} y = x \\ y = x^2 - x \end{cases} \iff \begin{cases} y = x \\ x = x^2 - x \end{cases} \iff \begin{cases} y = x \\ x(x-2) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x = 0 \\ \quad \text{ó} \\ y = x = 2 \end{cases}$$

Es obvio que la región entre ambas gráficas no es acotada si $-\infty \leq x \leq 0$ ó $2 \leq x \leq +\infty$; así la única región acotada es cuando $0 \leq x \leq 2$. Ahora sólo falta ver qué gráfica queda por encima y tendremos $D$ descrito como región de tipo I. Para ello habría que estudiar el signo de $x-(x^2-x)$, pero no es necesario pues sabemos que $x \geq 0$ en el intervalo $[0,2]$ y, en cambio, la parábola tiene algunas ordenadas negativas; luego la recta está por encima de la parábola. Todo lo dicho queda claro en su representación geométrica (figura 2). Por tanto,

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{array}{c} 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 - x \leq y \leq x \end{array} \right\}$$

y la integral se calcula de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 \left( \int_{x^2-x}^{x} xe^{x+y}\, dy \right) dx = \int_0^2 x \left( \left[ e^{x+y} \right]_{y=x^2-x}^{y=x} \right) dx = \int_0^2 \left( xe^{2x} - xe^{x^2} \right) dx \\ &= \int_0^2 xe^{2x} dx - \frac{1}{2} \int_0^2 2xe^{x^2} dx. \end{aligned}$$

La segunda integral es inmediata y, para calcular una primitiva de la primera, integramos por partes considerando

$$\begin{cases} u = x & \Longrightarrow du = dx \\ dv = e^{2x} dx \Longrightarrow & v = \dfrac{1}{2} e^{2x} + c \end{cases},$$

entonces, con $c = 0$ es

$$\int xe^{2x} dx = \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx = \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C.$$

Considerando la primitiva con $C = 0$, la integral pedida queda

$$I = \left[ \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} \right]_{x=0}^{x=2} - \left[ \frac{e^{x^2}}{2} \right]_{x=0}^{x=2} = e^4 - \frac{e^4}{4} + \frac{1}{4} - \frac{e^4}{2} + \frac{1}{2} = \frac{e^4+3}{4}.$$

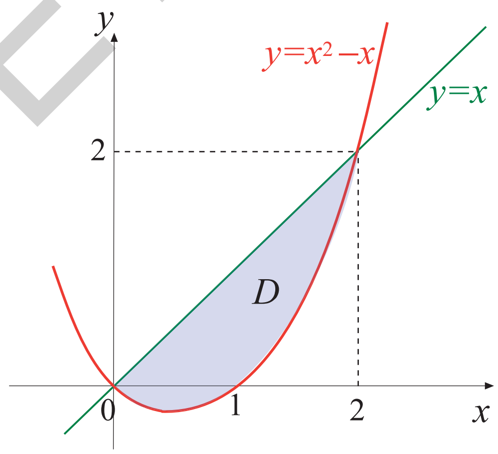


Figura 2: Dominio de integración del problema 4

**5.** *Calcule la integral*

$$I = \iint_D \frac{y}{1+x^2+y^2}\, dxdy,$$

*donde* $D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{array}{l} x^2+y^2 \leq 1 \\ 0 \leq y \end{array} \right\}$

**Solución**

Atendiendo tanto al recinto de integración como a la función integrando, parece adecuado un cambio de variable a coordenadas polares en el origen: $\bar{\varphi} : [0,+\infty) \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ tal que $(x,y) = \bar{\varphi}(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta)$. Entonces se tiene

$$\begin{array}{lllll} 0 \leq x^2+y^2 \leq 1 & \longrightarrow & 0 \leq \rho^2 \leq 1 & \overset{\rho \geq 0}{\Longleftrightarrow} & 0 \leq \rho \leq 1 \\ 0 \leq y & \longrightarrow & 0 \leq \rho\operatorname{sen}\theta & \overset{\rho\geq 0}{\Longleftrightarrow} & \operatorname{sen}\theta \geq 0 \quad \overset{\theta\in[0,2\pi]}{\Longleftrightarrow} \quad 0 \leq \theta \leq \pi. \end{array}$$

Luego, la región $D^*$ tal que $\bar{\varphi}(D^*) = D$ es $D^* = [0,1] \times [0,\pi]$ y la integral pedida es

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \frac{y}{1+x^2+y^2}\,dxdy = \iint_{D^*} \frac{\rho\operatorname{sen}\theta}{1+\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\operatorname{sen}^2\theta} |\det(J\bar{\varphi}(\rho,\theta))|\,d\rho d\theta \\ &= \iint_{D^*} \frac{\rho^2\operatorname{sen}\theta}{1+\rho^2}\,d\rho d\theta = \int_0^\pi \left( \int_0^1 \operatorname{sen}\theta \frac{\rho^2}{1+\rho^2}\,d\rho \right) d\theta = \int_0^\pi \operatorname{sen}\theta\,d\theta \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+\rho^2}\right) d\rho \\ &= \left( [-\cos\theta]_{\theta=0}^{\theta=\pi} \right) \left( [\rho - \arctan\rho]_{\rho=0}^{\rho=1} \right) = (-\cos\pi + \cos 0)\,(1 - \arctan 1 + \arctan 0) \\ &= 2 - \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$